chap ④

Equation non-linéaire

⇒ Methode de Dichotomies (où bissect°) :

. Principe : la resolut° numérique de $f(x)=0$ est :

- la séparat° des racines
- le calcul successif des racines séparés

* la séparat° des racines se fait par cette technique :

. on Decoupe $[a,b]$ en n intervale en procédant par la suite $(x_n)_n$ construite par la meth. de bissect° : $x_n = \frac{a+b}{2}$

. on calcul $f(x_i) \times f(x_{i+1})$ et si :

$f(x_i) < 0 \Rightarrow x_i < \alpha < b$ (ce n'est pas tj b)

$f(x_i) > 0 \Rightarrow b < \alpha < x_i$

. finalement si $x_i < \alpha < \alpha_{i+1}$ tq $x_i - x_{i+1} = 0{,}1; 0{,}01 \ldots$ alors la racine α est isolé après n itérat°

. nbr d'iterat° n :

soit f Def sur I tq $I \in [a,b]$ et ε est une donné alors le nbr maximal d'interat° est :

$$n \geq \frac{\log(b-a) - \log(\varepsilon)}{\log(2)}$$

. Rq : Pour isoler la racine α on utilise l'algo- de Dichotomie vue en cours.

⇒ Methode de Newton-Raphson :

. Théorème : soit $f \in C^2[a,b]$ avec $\alpha \in]a,b[$

si α est une racine simple de l'eq $f(x)=0$ alors $\exists\, \theta \in \mathbb{R}^{*+}$ tq $\forall x_0 \in [\alpha-\theta, \alpha+\theta]$, l'iterat° de Newton est :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n \geq 0,\ f'(x_n) \neq 0$$

. Rq : . x_0 est une donnée ds l'exo.

. x_n est la racine donnée par le programe.

⇒ Methode de la sécante :

lorsqu'on ne peut pas calculer $f'(x)$, on la remplace par l'expression approchée :

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

la formule de récurrence Devient :

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

l'idée est de remplacer la tangente de C_f par la secante qui passe par $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$

⇒ Methode du pt fixe :

. Principe : . le But est de resoudre l'eq (E_1). tq (E_1) : $f(x)=0$.

. Cette meth. consiste à remplacer la résolut° de (E_1) par la résolut° de l'eq suivante :

(E_2) : $g(x) = x$

H.LEMRANI

Applicat° : le choix de g doit être tq :

- la suite Déf par $\begin{cases} x_0 \in [a,b] & \text{(Donnée)} \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$ soit convergente.

et si g est cont $\Rightarrow \lim x_n = \alpha$ est sol de (E_2)

- la sol. (E_2) est aussi sol. de (E_1)

Theorème : $g : [a,b] \longrightarrow [a,b]$

- soit g Déf et cont sur $[a,b]$
- g est une contract° ssi :
  - * g est Dev sur $[a,b]$
  - * $\forall x \in [a,b]$, $|g'(x)| \leq k < 1$

On Demontre ce th. par la formule de A.F :

$\forall(\alpha,\beta) \in [a,b] \times [a,b]$, $\exists \xi \in]\alpha,\beta[$ tq

$$|g(\alpha) - g(\beta)| \leq g(\xi)|\alpha - \beta|$$
$$\leq k|\alpha - \beta|$$

Rq : Pour assurer le bon choix de g on fait recourt à la Meth suivante :

- si $|g'(\alpha)| < 1$ (cv) bon choix, d'ordre 1
- si $|g'(\alpha)| = 0$ (cv) bon choix, d'ordre 2
- si $|g'(\alpha)| \geq 1$ Mauvais choix
- si $|g'(\alpha)| = 1$ on ne peut rien Dire

(avec α est la racine de l'éq (E_1))

nbr d'iterat° : on part de

$$(*) \quad |x_k - \alpha| \leq c|x_{k-1} - \alpha| \quad \text{(ce n'est pas tj le cas)}$$
$$\leq c^2|x_{k-2} - \alpha|$$
$$\vdots$$
$$\leq c^k|x_0 - \alpha| \quad \text{(avec } k \text{ est le nbr d'iterat°)}$$

les Donné sont : $|x_k - \alpha| \leq$ le pas (exp 10^{-7})

et $|x_0 - \alpha| < \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

la relat° $(*)$ est obtenue d'après le T.A.F

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq c|x_k - \alpha|$$
$$|\phi(x_k) - \alpha| \leq c|x_k - \alpha| \quad \text{(voir Exo 2. TD}_4\text{)}$$

⇒ Algorithmes :

• Methode de bissection :

ε = Precision;

$n = 1$; $a =$; $b =$;

tant que $\frac{b-a}{2} > \varepsilon$ **faire**

$p = \frac{a+b}{2}$

$n = n + 1$

si $f(p) < 0$ **alors** $a = p$

sinon $b = p$

Fsi

Ftant que

• Methode de Newton-Raphson :

$\varepsilon =$; $P = x_0$ (Donnée) ;

$n = 1$;

tant que $\left|\frac{f(p)}{f'(p)}\right| > \varepsilon$ **faire**

$p = p + \frac{f(p)}{f'(p)}$

$n = n + 1$

ftant que

• Methode de la sécante :

$\varepsilon =$; $n = 2$;

$y_0 = f(x_0)$; $y_1 = f(x_1)$

tant que $\left|\frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} y_1\right| > \varepsilon$ **faire**

$x = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} \cdot y_1$

$n = n + 1$

$x_0 = x_1$; $x_1 = x$;

$y_0 = y_1$; $y_1 = f(x)$;

Ftant que

• Methode de point fixe :

$\varepsilon =$; $n = 1$

Tant que $|g(x_0) - x_0| > \varepsilon$ **faire**

$x = g(x)$

$n = n + 1$

Ftant que